２次曲線と極方程式の融合問題

by Aokijuku

問題

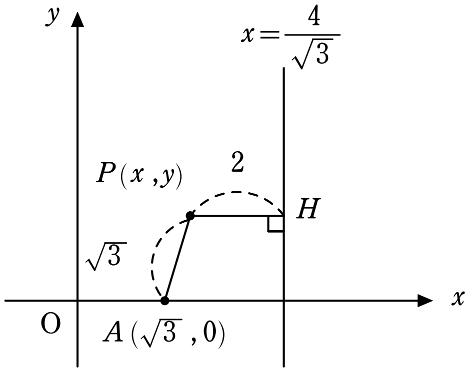
(1)　直交座標において、点 A$(\sqrt{3}\,,0)$ と準線 $x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ からの距離の比　が $\sqrt{3}:2$ である点 P$(x\,,\,y)$ の軌跡を求めよ。

(2)　(1)における Aを極、 x 軸の正の部分と半直線AXとのなす角θを偏　角とする極座標を定める。このとき、Pの軌跡を $r=f(\theta)$ の形の極方　程式で求めよ。但し、$0\leqq\theta<2\pi\,,r>0$ とする。

(3)　Aを通る任意の直線と(1)で求めた曲線との交点をR , Qとする。　このとき $\dfrac{1}{RA}+\dfrac{1}{QA}$ は、一定であることを示せ。

(帯広畜産大学)

解答　(1)



点Pから準線に下ろした垂線の足をHとすると

$AP:PH=\sqrt{3}:2$ より

$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}:\left|\frac{4}{\sqrt{3}}-x\right|=\sqrt{3}\ ;2$$

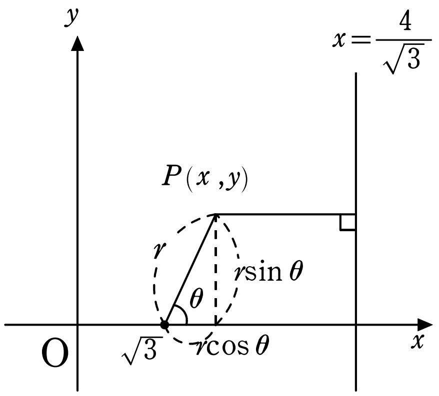
$$2\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}=\sqrt{3}\left|\frac{4}{\sqrt{3}}-x\right|$$

$$\Longleftrightarrow\quad 4x^2-8\sqrt{3}x+12+4y^2=16-8\sqrt{3}x+3x^2$$

$$x^2+4y^2=4\qquad\therefore\ \frac{x^2}{4}+y^2=1$$

逆に、この曲線状の任意の点P$(x\,,\,y)$ は与えられた条件を満たす。

(2)



左図より、 $x=\sqrt{3}+r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$　　これらを $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ に代入

し　$\dfrac{3+2\sqrt{3}r\cos\theta+r^2\cos^2\theta}{4}+r^2\sin^2\theta=1$

$$(4\sin^2\theta+\cos^2\theta)r^2+2\sqrt{3}r\cos\theta-1=0$$

これを r の２次方程式と見なして、解の公式を利用すると

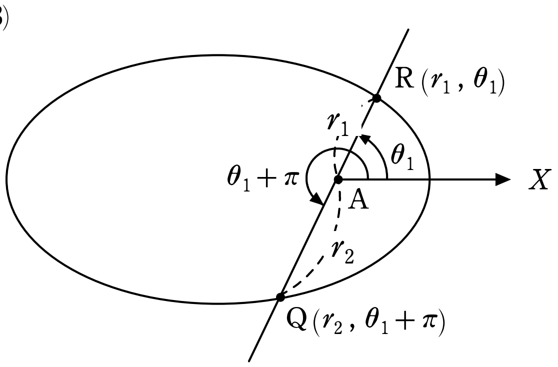
$$r=\frac{-\sqrt{3}\cos\theta\pm\sqrt{3\cos^2\theta+4\sin^2\theta+\cos^2\theta}}{4\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$=\frac{-\sqrt{3}\cos\theta\pm 2}{4\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$r>0$ より　$r=\dfrac{-\sqrt{3}\cos\theta+2}{4\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\dfrac{2-\sqrt{3}\cos\theta}{4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-3\cos^2\theta}$

$$=\frac{2-\sqrt{3}\cos\theta}{(2+\sqrt{3}\cos\theta)(2-\sqrt{3}\cos\theta)}=\frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$$

(3)



２点 R , Q の極座標をそれぞれ

R (r_1, θ_1) , Q $(r_2, \theta_1+\pi)$ とおくと、いずれも

$r=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$ を満たすから

$r_1=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta_1}$

$r_2=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}\cos(\theta_1+\pi)}$　となる。

このとき　$\dfrac{1}{RA}+\dfrac{1}{QA}=\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}=2+\sqrt{3}\cos\theta_1+2+\sqrt{3}\cos(\theta_1+\pi)$

$=2+\sqrt{3}\cos\theta_1+2-\sqrt{3}\cos\theta_1=4$　(一定)