複素数平面の図形の問題 ①

by Aokijuku

問題 lを複素数平面上の直線 $z=t(1+i)$ （tは実数）, α, β を複素数とする。但し、点αは l 上にないとする。

(1) $\alpha=i\beta$ または $\alpha=\overline{\beta}$ ならば、l 上の全ての点 z に対して $\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$ であることを示せ。

(2) l 上の全ての点 z に対して、$\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$ ならば、$\alpha=i\beta$ または $\alpha=\overline{\beta}$ であることを示せ。

(3) l 上の異なる２定点 z_1, z_2 があって $\dfrac{\overline{z_1}-\beta}{z_1-\alpha}$ と $\dfrac{\overline{z_2}-\beta}{z_2-\alpha}$ は同じ複素　数になるとする。この複素数をγとおくとき、l 上の全ての点 z に対　して $\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}=\gamma$ となることを示せ。また、γの値を求めよ。　(広島大学)

解答 (1)　$\alpha=i\beta$ のとき　$\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=\left|\dfrac{t(1-i)-\beta}{t(1+i)-i\beta}\right|=\left|\dfrac{i\{t(1-i)-\beta\}}{t(1+i)-i\beta}\right|=\left|\dfrac{t(1+i)-i\beta}{t(1+i)-i\beta}\right|=1$

$\alpha=\overline{\beta}$ のとき　$\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\overline{\beta}}\right|=\dfrac{|\overline{z}-\beta|}{|z-\overline{\beta}|}=\dfrac{|\overline{\overline{z}-\beta}|}{|z-\overline{\beta}|}=\dfrac{|z-\overline{\beta}|}{|z-\overline{\beta}|}=1$

(2)　$\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$ より　$|\overline{z}-\beta|=|z-\alpha|\cdots$①

$\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ （a, b, c, dは実数）とおくと　$\overline{z}-\beta=t(1-i)-(c+di)=(t-c)-(t+d)i$

また、$z-\alpha=t(1+i)-(a+bi)=(t-a)+(t-b)i$

よって①式より　$\sqrt{(t-c)^2+(t+d)^2}=\sqrt{(t-a)^2+(t-b)^2}$

両辺２乗し t について整理すると　$2t^2-2(c-d)t+c^2+d^2=2t^2-(a+b)t+a^2+b^2$

これは t についての恒等式だから　$\begin{cases} c-d=a+b\cdots② \\ c^2+d^2=a^2+b^2\cdots③ \end{cases}$

②より　$c-a=b+d\cdots$②'　　③より　$c^2-a^2=b^2-d^2$　$(c-a)(c+a)=(b-d)(b+d)\cdots$③'

②' を③'に代入し　$(b+d)(c+a)=(b-d)(b+d)$

(ア)　$b+d\fallingdotseq 0$ のとき　③'より　$c+a=b-d\cdots$④

②'+④より　$2c=2b$　$\therefore c=b$　これを④に代入し $a=-d$

このとき　$\alpha=-d+ci$, $\beta=c+di$ となり、$\alpha=i\beta$ となる。

(イ)　$b+d=0$ のとき　$b=-d$　これを②'に代入し

$c-a=0$　$\therefore a=c$　このとき　$\alpha=c-di$, $\beta=c+di$ となり、$\alpha=\overline{\beta}$ となる。

(ア)(イ) より $\alpha=i\beta$ または $\alpha=\overline{\beta}$ である

(3)　$z_1=t_1(1+i)$, $z_2=t_2(1+i)$ （t_1 , t_2 は実数、$t_1\fallingdotseq t_2$）とおくと、$\dfrac{\overline{z_1}-\beta}{z_1-\alpha}=\dfrac{\overline{z_2}-\beta}{z_2-\alpha}$ より

$(z_2-\alpha)(\overline{z_1}-\beta)=(\overline{z_2}-\beta)(z_1-\alpha)$　　$z_2\overline{z_1}-\beta z_2-\alpha\overline{z_1}+\alpha\beta=z_1\overline{z_2}-\alpha\overline{z_2}-\beta z_1+\alpha\beta$

$t_1t_2(1+i)(1-i)-\beta t_2(1+i)-\alpha t_1(1-i)$

$=t_1t_2(1+i)(1-i)-\alpha t_2(1-i)-\beta t_1(1+i)-\alpha(1-i)(t_1-t_2)=-\beta(1+i)(t_1-t_2)$

$t_1-t_2 \fallingdotseq 0$ より、両辺を $-(t_1-t_2)$ で割って　$\alpha(1-i)=\beta(1+i)$　　$\alpha=\dfrac{1+i}{1-i}\beta$　　$\alpha=\dfrac{1+2i-1}{2}\beta$

$\therefore \alpha=i\beta$

ところで z は2点 z_1, z_2 を結ぶ直線上の点だから　$z=(1-s)z_1+sz_2$　（s は実数）とおくと

$$\frac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}=\frac{\overline{(1-s)z_1+sz_2}-\beta}{(1-s)z_1+sz_2-i\beta}=\frac{(1-s)t_1(1-i)+st_2(1-i)-\beta}{(1-s)t_1(1+i)+st_2(1+i)-i\beta}$$

$$=\frac{i\{(1-s)t_1(1-i)+st_2(1-i)-\beta\}}{(1-s)t_1(1+i)+st_2(1+i)-i\beta}\cdot\frac{1}{i}=\frac{(1-s)t_1(1+i)+st_2(1+i)-i\beta}{(1-s)t_1(1+i)+st_2(1+i)-i\beta}\cdot\frac{1}{i}=\frac{1}{i}=-i$$

よって　$\gamma=-i$　となる。