媒介変数の重要問題②（問題演習）

by Aokijuku

問題 次の媒介変数で表される曲線を求めなさい。

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ t\geqq -1 \end{cases}$$

ヒント x, y の式の右辺を $\dfrac{1}{1+t^2}$ 、$\dfrac{t}{1+t^2}$ の基本形にして t を消去すれば良いのですが、問題は x と y の範囲です。 とても重要な問題ですので、徹底的に研究して下さい。

解答 $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{-(1+t^2)+2}{1+t^2}=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$ より $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{1}{1+t^2}\cdots$① $y=\dfrac{2t}{1+t^2}$ より

$\dfrac{y}{2}=\dfrac{t}{1+t^2}\cdots$② ①と②の両辺２乗し、辺々加えると $\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=\dfrac{1+t^2}{(1+t^2)^2}=\dfrac{1}{1+t^2}=\dfrac{x+1}{2}$

$\dfrac{x^2+2x+1}{4}+\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$ $x^2+2x+1+y^2=2x+2$ $\therefore x^2+y^2=1$

ところで①について、$t\geqq -1$ より $1+t^2\geqq 2$ つまり、$0<\dfrac{1}{1+t^2}\leqq\dfrac{1}{2}$ よって $0<\dfrac{x+1}{2}\leqq\dfrac{1}{2}$

$0<x+1\leqq 1$ $\therefore -1<x\leqq 1$ また②について $t\fallingdotseq 0$ のとき、両辺の逆数をとると、$\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{t}+t$

$t>0$ のときは、$\dfrac{1}{t}$ も t も正だから 相加平均≧相乗平均より、$\dfrac{\frac{1}{t}+t}{2}\geqq\sqrt{\dfrac{1}{t}\times t}=1$

よって $\dfrac{1}{t}+t\geqq 2$ より、$\dfrac{2}{y}\geqq 2$ $2\geqq 2y(>0)$ $\therefore 0<y\leqq 1$ また、$-1\leqq t<0$ のときは、$\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{t}+t$ の両辺を

t で微分すると $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{2}{y}\right)=-\dfrac{1}{t^2}+1$ となり、$0<t^2\leqq 1$ より $1\leqq\dfrac{1}{t^2}$ $-1\geqq-\dfrac{1}{t^2}$ $0\geqq-\dfrac{1}{t^2}+1$ より

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{2}{y}\right)\leqq 0$ となり $\dfrac{2}{y}$ は $-1\leqq t<0$ の範囲で単調減少になる。よって、$\dfrac{2}{y}\leqq -2$ より $\dfrac{1}{y}\leqq -1$

すなわち $-1\leqq y<0$ となる。 更に $t=0$ のとき、②より $y=0$ となる。よって、t の範囲で y の取り得る範囲を整理すると $t>0$ のとき $0<y\leqq 1$、$t=0$ のとき $y=0$

$-1\leqq t<0$ のとき $-1\leqq y<0$ となる。

ここで t の範囲によって x の範囲も改めて一緒に考えると

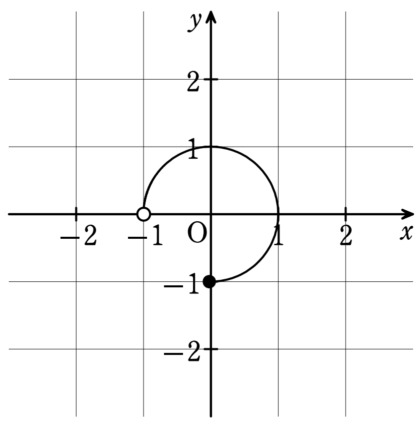
$t>0$ のとき $0<\dfrac{1}{1+t^2}<1$ より、$0<\dfrac{x+1}{2}<1$

$\therefore -1<x<1$ 更に $0<y\leqq 1$ $t=0$ のとき $(x, y)=(1, 0)$

$-1\leqq t<0$ のとき、$\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{x+1}{2}<1$ より $0\leqq x<1$

さらに $-1\leqq y<0$ これらを元に曲線のグラフを描くと

右図のようになる。



$\boxed{\text{補足}}$ yの変域の求め方について、$y=\dfrac{2t}{1+t^2} \Leftrightarrow y(1+t^2)=2t$ より　$yt^2-2t+y=0$

$y \fallingdotseq 0$ の時（勿論、あとで $y=0$ の時のチェックは必要です。）これを t の二次方程式と見なし、この二次方程式が $t \geqq -1$ の範囲に解を持つ条件を求めることにより、yの変域を求めることも出来ます。但し、その場合、$yt^2-2t+y=0$ の凹凸が yの符号に影響を受けますから、両辺に yをかけて$y^2t^2-2yt+t^2=0$ （これは同値変形です）とし、$f(t)=y^2t^2-2yt+t^2$ （こうすると、グラフは下に凸になりますから、考えやすいですね）とおいて、$t \geqq -1$ の範囲でグラフが t軸と交点を持つ yの条件を求めると良いですね。このようにすると数 I の範囲で問題が解けますが、円のグラフのどの部分が欠けるかを考える際に、やはり十分な検討を加えなければなりませんから、どちらにしても面倒は避けられないということです。二次の問題は確かに面倒ですが、色々考えることによって学ぶことはとても多いですから、むしろ楽しむつもりで一問一問大切にして下さい。その姿勢が合格へとつながっていくのです。