媒介変数で表された図形の面積 ①　　by Aokijuku

問題 次の問に答えよ。

(1) 定積分 $\int_0^k e^{-t}(\cos t-\sin t)dt$ を求めよ。

(2) xy 平面上の曲線 $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。　(広島大学)

解答 (1)　まず2つの不定積分 $\int e^{-t}\cos t\,dt$ と $\int e^{-t}\sin t\,dt$ を求める。

$$\int e^{-t}\cos t\,dt=\int(-e^{-t})'\cos t\,dt=-e^{-t}\cos t-\int(-e^{-t})(-\sin t)dt$$

$$=-e^{-t}\cos t-\int e^{-t}\sin t\,dt=-e^{-t}\cos t-\int(-e^{-t})'\sin t\,dt$$

$$=-e^{-t}\cos t-\left\{-e^{-t}\sin t-\int(-e^{-t})\cos t\,dt\right\}=-e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t-\int e^{-t}\cos t\,dt$$

移項し整理して、積分定数 C を考慮すると $\int e^{-t}\cos t\,dt=\frac{e^{-t}}{2}(\sin t-\cos t)+C$ …①

また $\int e^{-t}\sin t\,dt=\int(-e^{-t})'\sin t\,dt=-e^{-t}\sin t-\int(-e^{-t})\cos t\,dt$

$$=-e^{-t}\sin t+\int e^{-t}\cos t=-e^{-t}\sin t+\int(-e^{-t})'\cos t\,dt$$

$$=-e^{-t}\sin t-e^{-t}\cos t-\int(-e^{-t})(-\sin t)dt=-e^{-t}\sin t-e^{-t}\cos t-\int e^{-t}\sin t\,dtdt$$

移項し整理して、積分定数 C を考慮すると $\int e^{-t}\sin t\,dt=-\frac{e^{-t}}{2}(\sin t+\cos t)+C$ …②

①, ②を利用すると $\int_0^k e^{-t}(\cos t-\sin t)dt=\left[e^{-t}\sin t\right]_0^k=e^{-k}\sin k$

(2)　まず $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ をそれぞれ t で微分し、$\frac{dx}{dt}=0$ 、$\frac{dy}{dt}=0$ となる t の値を求める。

$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos t+e^{-t}(-\sin t)=-e^{-t}(\sin t+\cos t)$　$\frac{dx}{dt}=0$ より $\sin t+\cos t=0$　よって

$\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=0$ となり、これを $\frac{\pi}{4}<t+\frac{\pi}{4}<\frac{5}{4}\pi$ で解くと、$t+\frac{\pi}{4}=\pi$　$\therefore t=\frac{3}{4}\pi$

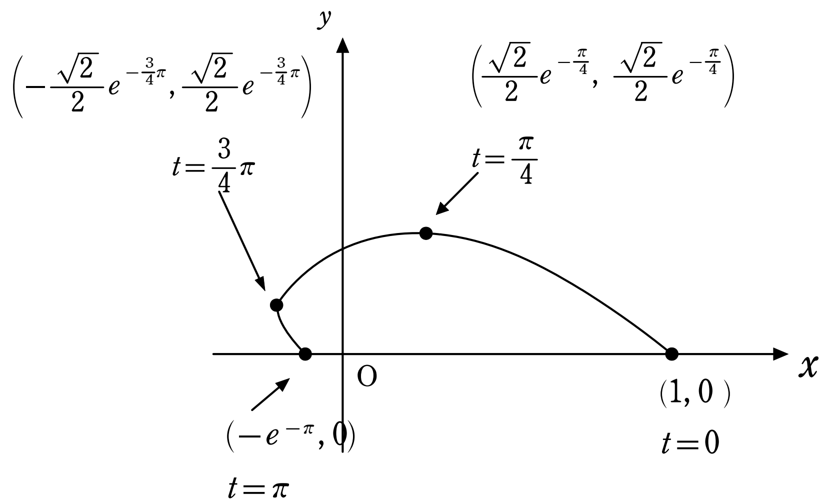
また、$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=-e^{-t}(\sin t-\cos t)$

$\frac{dy}{dt}=0$ より $\sin t-\cos t=0$　よって $\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=0$ となり、これを $-\frac{\pi}{4}<t-\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$ で解くと

$t-\frac{\pi}{4}=0$　$\therefore t=\frac{\pi}{4}$　このとき、増減表は以下のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{dt}$	/	$-$	$-$	$-$	0	$+$	/
x	1	$\leftarrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\leftarrow$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$	$\rightarrow$	$-e^{-\pi}$
$\dfrac{dy}{dt}$	/	$+$	0	$-$	$-$	$-$	/
y	0	$\uparrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\downarrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$	$\downarrow$	0
$(x,\ y)$		$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	

更に増減表より、グラフの概形は次のようになる。



$0 \leqq t \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ のところにおけるグラフの式を y_1、$\dfrac{3}{4}\pi \leqq t \leqq \pi$ におけるグラフの式を y_2 とすると、求める面積は

$$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}}^{1} y_1 dx - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}}^{-e^{-\pi}} y_2 dx \quad = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{0} e^{-t}\sin t \frac{dx}{dt}dt - \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} e^{-t}\sin t \frac{dx}{dt}dt$$

$$= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{0} e^{-t}\sin t\{-e^{-t}(\sin t + \cos t)\}dt - \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} e^{-t}\sin t\{-e^{-t}(\sin t + \cos t)\}dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{3}{4}\pi} e^{-2t}(\sin^2 t + \sin t\cos t)dt + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} e^{-2t}(\sin^2 t + \sin t\cos t)dt$$

$$= \int_{0}^{\pi} e^{-2t}(\sin^2 t + \sin t\cos t)dt = \int_{0}^{\pi} e^{-2t}\left(\frac{1-\cos 2t}{2} + \frac{\sin 2t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} e^{-2t}(\sin 2t - \cos 2t)dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} e^{-2t}dt$$

$2t = s$ とおいて両辺を s で微分すると　$2\dfrac{dt}{ds} = 1$　$\therefore \dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{2}$

また

t	$0 \to \pi$
s	$0 \to 2\pi$

このとき　(求める面積) $= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} e^{-s}(\cos s - \sin s)ds + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} e^{-s}ds$

$$= -e^{-2\pi}\sin 2\pi + \frac{1}{4}\Big[-e^{-s}\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{4}(-e^{-2\pi}+1) = \frac{1}{4}(1-e^{-2\pi})$$　となる。

補足　媒介変数の積分は、置換積分と同じ方法で計算することが出来ます。$f(x)$（つまり y）において、x が t の関数であるとき、$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を t で微分すると、合成関数の微分より

$\frac{d}{dt}F(x) = \frac{d}{dx}F(x)\cdot\frac{dx}{dt} = f(x)\cdot\frac{dx}{dt} = f(g(t))\cdot\frac{dx}{dt}$　つまり　$\frac{d}{dt}F(x) = f(g(t))\cdot\frac{dx}{dt}$　となります。

この両辺を t で積分し　$F(x) = \int f(g(t))\cdot\frac{dx}{dt}dt$　すなわち　$\int f(x)dx = \int f(g(t))\frac{dx}{dt}dt$　となりますね。勿論、定積分の場合は、x と t の範囲の対応関係に注意することが必要です。