置換積分と部分積分の融合問題

by Aokijuku

問題 n を正の整数とする。

(1) 置換積分によって $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x(1-\sin x)^n dx$ を計算せよ。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ。 (宮城教育大学)

解答 (1) $\sin x=t$ とおいて両辺を t で微分すると $\cos x\dfrac{dx}{dt}=1$ $\therefore \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\cos x}$ また

x	$0\to\frac{\pi}{2}$
t	$0\to 1$

このとき $a_n=\int_0^1 t^2\cos x(1-t)^n\dfrac{1}{\cos x}dt=\int_0^1 t^2(1-t)^n dt=\int_0^1 t^2\left\{-\dfrac{1}{n+1}(1-t)^{n+1}\right\}'dt$

$$=\left[-\frac{1}{n+1}t^2(1-t)^{n+1}\right]_0^1-\int_0^1 2t\left\{-\frac{1}{n+1}(1-t)^{n+1}\right\}dt=\frac{2}{n+1}\int_0^1 t(1-t)^{n+1}dt$$

$$=\frac{2}{n+1}\int_0^1 t\left\{-\frac{1}{n+2}(1-t)^{n+2}\right\}'dt=\frac{2}{n+1}\left\{\left[-\frac{1}{n+2}t(1-t)^{n+2}\right]_0^1+\frac{1}{n+2}\int_0^1(1-t)^{n+2}dt\right\}$$

$$=\frac{2}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}\left[-\frac{1}{n+3}(1-t)^{n+3}\right]_0^1=\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると、

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

よって $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}=\dfrac{1}{6}$