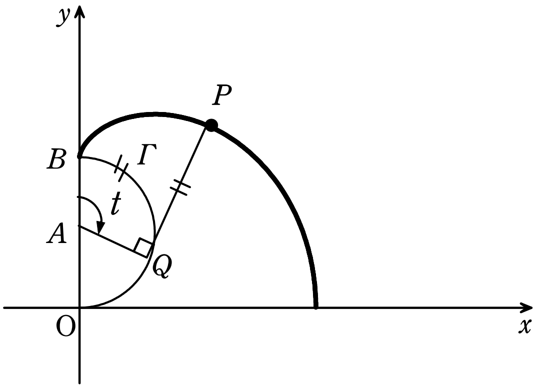
ベクトルと媒介変数が関わる図形の面積を求める問題 byAokijuku

問題 原点をOとし、平面上の2点 $A(0\,,1)\,,B(0\,,2)$ をとる。OBを直径とし、点$(1\,,1)$を通る半円をΓ（ギリシャ文字γ〔ガンマ〕の大文字）とする。長さπの糸が一端をOに固定して、Γに巻き付けてある。この糸の他端Pを引き、それがx軸に到達するまで、緩むことなくほどいていく。糸と半円との接点をQとし、$\angle BAQ$の大きさをtとする。（図を見よ）

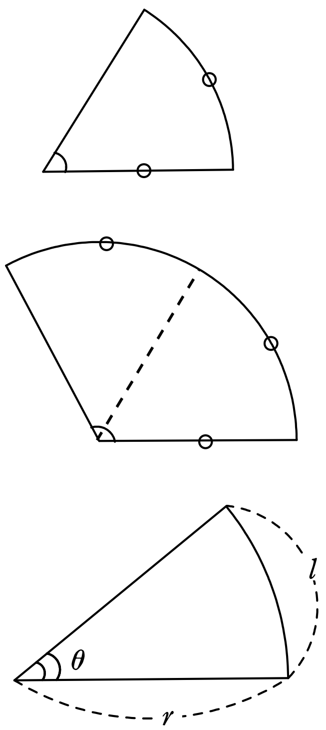
(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ をtを用いて表せ。

(2) Pが描く曲線と、x軸およびy軸で囲まれた図形の面積を求めよ。（早稲田大学）



ヒント 円周上の点の座標の表し方や、弧度法の意味への理解が問われる問題である。特に弧度法については、単に$180°=\pi$といった表面的な理解に留まっている人が多いので、1ラジアンの定義等をしっかり確認しておきたい。

参考（弧度法の意味）「1ラジアンを定義せよ」と言われたら、ちゃんと答えられるかな。左図のように、扇形において半径と弧の長さが等しいときの中心角の大きさを1ラジアンと言うんだ。



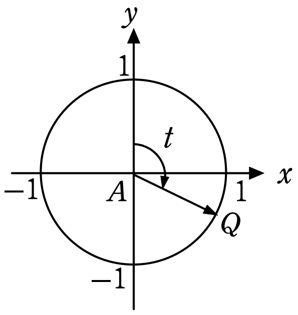
じゃあ、真ん中の扇形の中心角は何ラジアンだろうか。そうだね。勿論、２ラジアンだね。ところで、その２ラジアンの２って、どこから出てきたんだろう。１ラジアンの２倍って、どうやって気づいたんだろう。そう、弧の長さが半径の長さの２倍だから２ラジアンって気づいたんじゃないかな。

実は、そこにラジアンの定義が隠れているんだよ。つまり、左の一番下の図においてθラジアンのθは、$\theta=\dfrac{l}{r}$ で定義されているんだ。じゃあ、中心角がθで、半径が1の扇形の弧の長さが分かるかな。$\theta=\dfrac{l}{r}$ で$r=1$ となるから、中心角と弧は等しくなるんだ。つまり、中心角がθで、半径が1の扇形の弧の長さは、中心角と同じθとなるね。

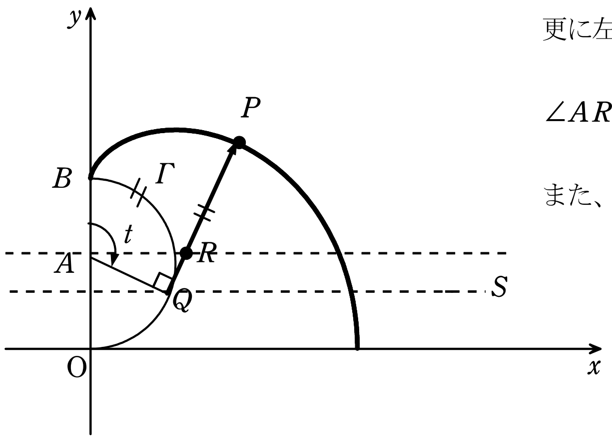
解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ だから、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,,\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\,,\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ それぞれを求め、それを足せば良い。

まず、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0\,,1)$　　次に $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ だけれど、これは単位円を使えば良いから

ベクトルと媒介変数が関わる図形の面積を求める問題 byAokijuku



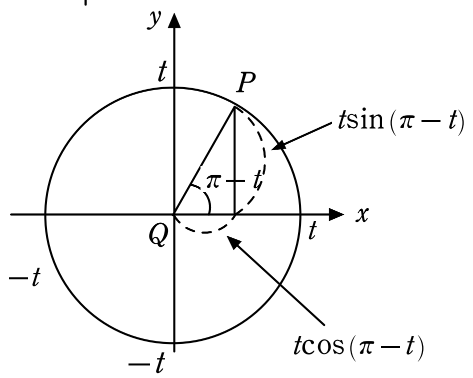
$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)$$
$$=(\sin t\ ,\ \cos t\ )$$



更に左図において、$\angle RAQ=t-\dfrac{\pi}{2}$ だから

$\angle ARQ=\angle PQS=\dfrac{\pi}{2}-\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi-t$

また、$QP=\overset{\frown}{BQ}=t$



よって　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(t\cos(\pi-t),\ t\sin(\pi-t))=(-t\cos t\ ,\ t\sin t\ )$

以上より、これら３つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$. $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ を加えて

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(\sin t-t\cos t,\ 1+\cos t+t\sin t)$

となる。

(2) $\begin{cases}x=\sin t-t\cos t\\ y=1+\cos t+t\sin t\end{cases}$ について

t	$0\to\pi$
x	$0\to\pi$

だから、(求める面積)$=\displaystyle\int_0^{\pi}y\,dx$

ところで　$\dfrac{dx}{dt}=-\sin t+\sin t-t\cos t=-t\cos t$　　このとき

$$(\text{求める面積})=\int_0^{\pi}y\,dx=\int_0^{\pi}(\sin t-t\cos t)(-t\cos t)dt=\int_0^{\pi}(-t\sin t\cos t+t^2\cos^2 t)dt$$

$$=\int_0^{\pi}\left\{-\frac{t}{2}\sin 2t+\frac{t^2}{2}(1+\cos 2t)\right\}dt=\int_0^{\pi}\left(-\frac{t}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)'dt+\left[\frac{t^3}{6}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)'dt$$

$$=\left[\frac{t}{4}\cos 2t\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\cos 2t\,dt+\frac{\pi^3}{6}+\left[\frac{t^2}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{t}{2}\sin 2t\,dt$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left[\frac{1}{8}\sin 2t\right]_0^{\pi}+\frac{\pi^3}{6}-\int_0^{\pi}\frac{t}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)'dt=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^3}{6}+\left[\frac{t}{4}\cos 2t\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\cos 2t\,dt$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}-\left[\frac{1}{8}\sin 2t\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^3}{6}$$