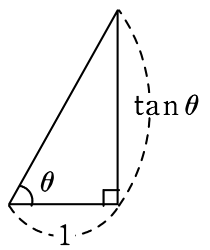
絶対値が関わる定積分の最大最小　by Aokijuku

問題　$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-t\sin x|dx$ とおく。

(1) $\cos\theta=t\sin\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\,,\ t>0\right)$ のとき、$\sin\theta$, $\cos\theta$ を t で表せ。

(2) 関数 $f(x)$ の $t>0$ における最小値を求めよ。　（名古屋大学）

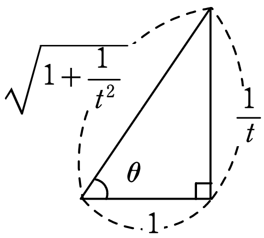
指針



左図の向きの直角三角形で、斜辺が1のときは、底辺が $\cos\theta$ 、高さが $\sin\theta$ となることは半ば常識ですが、底辺が1の直角三角形では、高さが $\tan\theta$ になることも、結構、問題に出てくるので、ここで再確認しておこう。

解答

(1)



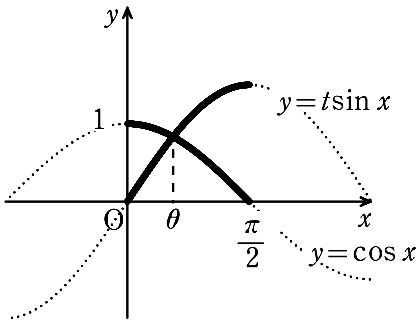
$\cos\theta=t\sin\theta$ より　$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{t}$　$\therefore \tan\theta=\frac{1}{t}$

このとき、左の直角三角形より

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

また、$\sin\theta=\dfrac{\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

(2)



$\cos x-t\sin x=0$ を満たす解を$\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$とすると、左図より

$f(x)=\int_0^{\theta}(\cos x-t\sin x)dx+\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}(t\sin x-\cos x)dx$　となる。

これを計算し $f(x)=\int_0^{\theta}(\cos x-t\sin x)dx+\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}(t\sin x-\cos x)dx$

$$=\Big[\sin x+t\cos x\Big]_0^{\theta}+\Big[-t\cos x-\sin x\Big]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sin\theta+t\cos\theta-t-1+t\cos\theta+\sin\theta$$

$$=2\sin\theta+2t\cos\theta-t-1=\frac{2}{\sqrt{t^2+1}}+\frac{2t^2}{\sqrt{t^2+1}}-t-1$$

$$=\frac{2(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}}-t-1=2\sqrt{t^2+1}-t-1$$

このとき、$\frac{d}{dt}f(x)=\dfrac{2\times 2t}{2\sqrt{t^2+1}}-1=\dfrac{2t-\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}$

$\frac{d}{dt}f(x)=0$ とおいて解くと、$2t=\sqrt{t^2+1}$ …①　両辺を2乗し、$4t^2=t^2+1$　　$t^2=\frac{1}{3}$　　$t=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

このうち①を満たすのは　$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　このとき増減表は以下の通り、

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$\dfrac{d}{dt}f(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	-1	$\searrow$	$\sqrt{3}-1$	$\nearrow$

増減表より、最小値は $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき、$\sqrt{3}-1$ となる。