絶対値で表された関数の定積分 ①

by Aokijuku

研究　入試問題全般について言えることだけれど、１つの問題は、通常、２つ、あるいは３つに分けられており、後半の問題は必ず前半の問題の結果を使って解くように作られている。もし、それを個別に解こうとしたなら、残念ながら、その段階で不合格は決定したと言っても、あながち間違いではないかも知れない。後半の問題の解き方に迷ったら、是非、前半の結果をどう使ったら良いか、もう一度、慎重に考えてみて欲しい。
以下の問題は、そういう意味では、とても良い例題だと思う。

問題 n を自然数とする。

(1) $\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x|\sin x|dx$ を n を用いて表せ。　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x|\sin nx|dx$を求めよ。　（京都工芸繊維大学）

(1) 方針 絶対値を外さなければ計算が出来ないから、まず n を偶数と奇数の場合に場合分けすることが基本。

解答　(i) nが奇数のとき

$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ において、 $\sin x \geqq 0$ だから

$$(\text{与式})=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x\sin x\,dx=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x(-\cos x)'dx=\Big[-x\cos x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}-\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}(-\cos x)dx$$

$$=n\pi+(n-1)\pi+\Big[\sin x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}=(2n-1)\pi$$

(ii) n が偶数のとき

$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ において、 $\sin x \leqq 0$ だから

$$(\text{与式})=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x(-\sin x)dx=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x(\cos x)'dx=\Big[x\cos x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}-\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\cos x\,dx$$

$$=n\pi+(n-1)\pi-\Big[\sin x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}=(2n-1)\pi$$

(2) 方針 (1)の結果を使わねばならないとすれば、 $nx=t$ とするしか他に選択肢はないことに気づくことがポイント。

解答　$nx=t$ とおいて、両辺を t で微分すると、 $n\dfrac{dx}{dt}=1$

$\therefore \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{n}$　　また、

x	$0\to\pi$
t	$0\to n\pi$

このとき

$$\int_0^{\pi} x|\sin nx|dx=\int_0^{n\pi}\frac{1}{n}t|\sin t|\frac{1}{n}dt=\frac{1}{n^2}\int_0^{n\pi}t|\sin t|dt=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}t|\sin t|dt$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\pi=\frac{1}{n^2}\left(2\pi\sum_{k=1}^{n}k-n\pi\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\left\{2\pi\times\frac{1}{2}n(n+1)-n\pi\right\}=\frac{1}{n^2}\times n^2\pi=\pi$$