# 漸化式を利用して体積を求める問題　　by Aokijuku

**問題** 曲線$y=e^{-x}$ 上の点 $P_0(0,1)$ における接線と $x$ 軸との交点を $Q_1$とする。 $Q_1$ から $y$ 軸に平行に引いた直線と曲線 $y=e^{-x}$ との交点を $P_1$ とする。 $P_1$ における曲線 $y=e^{-x}$ との交点を $Q_2$ とする。以下同様にして、 $P_2$，$Q_3$，$P_3$，$Q_4$，… を定める。

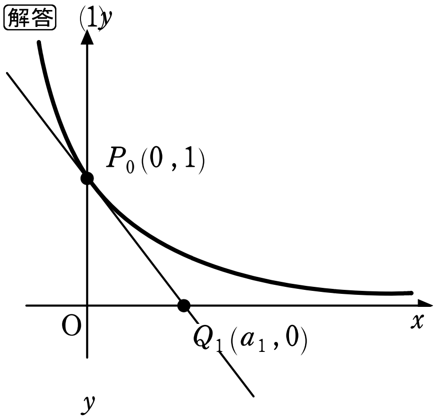
ここで、2直線 $P_{n-1}Q_n$，$P_nQ_n$ と曲線 $y=e^{-x}$ とで囲まれる図形を $x$ 軸の周りに一回転させる。このとき出来る回転体の体積を $V_n$ とする。

(1) $Q_n$ の座標を求めよ。　(2) $V_n$ を求めよ。　(3) $V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} V_n$ を求めよ。

(奈良教育大学)

**指針** この問題が解けるかどうかは(1)が解けるかどうかに掛かっている。(1) を解くには、$Q_n$ の $x$ 座標を $a_n$ とし、まず $a_1$ を求め、次に $a_n$ と $a_{n+1}$ の隣接２項の関係を求める。

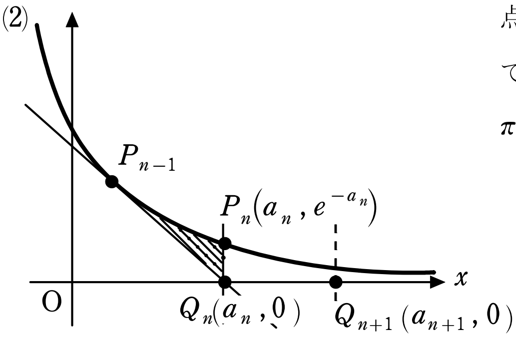
**解答** (1)




$y=f(x)=e^{-x}$ とおくと、 $f'(x)=-e^{-x}$　よって、 $f'(0)=-1$ より、点 $P_0(0,1)$ における接線の方程式は $y-1=-(x-0)$　つまり $y=-x+1$ となる。これに $y=0$ を代入すると、 $x=1$ となり、これを $a_1$ とし、$a_1=1$ とおく。次に点 $Q_n$ の座標を $Q_n(a_n,0)$ とすると、点$P_n$の座標は $P_n\left(a_n,e^{-a_n}\right)$ となり、その点における接線の方程式は

$y-e^{-a_n}=-e^{-a_n}(x-a_n)$　この直線で、 $y=0$ としたときの$x$座標を $a_{n+1}$とすると、 $1=a_{n+1}-a_n$　つまり $a_{n+1}=a_n+1$ となる。数列$\{a_n\}$は、初項が $a_1=1$ 、公差が1の等差数列となるので、 $a_n=n$ となる。つまり $Q_n$ の座標は、 $Q_n(n,0)$ となる。

(2)




点 $P_{n-1}$ の座標は $P_{n-1}(n-1,e^{-n+1})$ となるので、 $n-1\leqq x\leqq n$ の範囲で $y=e^{-x}$ のグラフを $x$ 軸の周りに回転させた図形から、底面積が $\pi(e^{-n+1})^2$ 、高さ1の円錐の体積を引いて

$$V_n=\pi\int_{n-1}^{n}(e^{-x})^2dx-\frac{1}{3}\pi(e^{-n+1})^2$$

$$=\pi\int_{n-1}^{n}e^{-2x}dx-\frac{1}{3}\pi e^{-2n+2}=\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{n-1}^{n}-\frac{1}{3}\pi e^{-2n+2}$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-2n}+\frac{1}{2}e^{-2n+2}\right)-\frac{1}{3}\pi e^{-2n+2}=\frac{1}{6}\pi e^{-2n+2}-\frac{1}{2}\pi e^{-2n}=\frac{1}{6}\pi e^{-2n}(e^2-3)$$

(3)　$V_n=\dfrac{\pi(e^2-3)}{6e^2}\cdot\left(\dfrac{1}{e^2}\right)^{n-1}$　より、数列$\{V_n\}$は、初項が $\dfrac{\pi(e^2-3)}{6e^2}$ 、公比が $\dfrac{1}{e^2}$ で、その無限等比級数は収束条件を満たすので、$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}V_n=\dfrac{\dfrac{\pi(e^2-3)}{6e^2}}{1-\dfrac{1}{e^2}}=\dfrac{\pi(e^2-3)}{6(e^2-1)}$　となる。