等比数列と積分（実戦編）

by Aokijuku

$\boxed{\text{問題}}$　x を実数，nを自然数とする。

(1) $1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ の和を求めよ。

(2) $S_n=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$ とする。このとき、等式 $S_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$ が成り立つことを示せ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$ を求めよ。

(4) 次の不等式を示せ。 $0\leqq\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx\leqq\frac{1}{2n+1}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。　（静岡大学）

$\boxed{\text{解答}}$ (1)　これは初項が1、公比が $-x^2$ 、項数が n の等比数列の和だから

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}=\frac{1-(-1)^nx^{2n}}{1+x^2}$$ となる。

(2)　(1)の結果を利用すると

$$\int_0^1\{1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}\}dx=\int_0^1\frac{1-(-1)^nx^{2n}}{1+x^2}dx$$

$$\left[x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}\right]_0^1=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$$

つまり、 $S_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$ が成り立つ。

(3)　$x=\tan\theta$ とおいて、両辺を θ で微分すると　$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　また

x	$0\to1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

このとき　$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

(4)　$0\leqq x\leqq1$ のとき、$1\leqq1+x^2\leqq2$　よって、$\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{1}{1+x^2}\leqq1$

$(0\leqq)\dfrac{1}{2}x^{2n}\leqq\dfrac{x^{2n}}{1+x^2}\leqq x^{2n}$　つまり $0\leqq\dfrac{x^{2n}}{1+x^2}\leqq x^{2n}$

この各辺を積分し　$0\leqq\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx\leqq\int_0^1x^{2n}dx$ つまり $0\leqq\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx\leqq\frac{1}{2n+1}$　となる。

(5)　$S_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$ より　$S_n=\dfrac{\pi}{4}-(-1)^n\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$

（i）　n が奇数のとき $S_n=\dfrac{\pi}{4}+\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$　よって(4)の結果より

$$\frac{\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \leqq \frac{1}{2n+1} + \frac{\pi}{4} \quad \therefore \frac{\pi}{4} \leqq S_n \leqq \frac{1}{2n+1} + \frac{\pi}{4}$$

このとき　$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$　また　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

よって、はさみうちの定理より $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$ となる。

（ii）　n が偶数のとき $S_n = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$　よって(4)の結果より

$$-\frac{1}{2n+1} \leqq -\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \leqq 0 \qquad -\frac{1}{2n+1} + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \leqq \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore -\frac{1}{2n+1} + \frac{\pi}{4} \leqq S_n \leqq \frac{\pi}{4}$$

（i)のときと同様に、はさみうちの定理を利用し $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$ となる。

以上より　$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$