

皆さんは「対称式」って言葉を知っていますか。高校数学を学ぶで「対称式」は必須の知識なのですが、残念ながら受験を控えた高3生でも「対称式」を知らない人が沢山います。今日は、その「対称式」について勉強します。

[対称式とは] 対称式とは、 $x^2 + y^2$ 、 $a^3 + b^3 + c^3$ など2種類、あるいは3種類の文字について、次数や係数、符号などが全く同等に扱われている式のことを言います。

[対称式の性質] 対称式は基本対称式で表せるという性質があります。基本対称式とは、例えば a と b なら、一次の $a + b$ 、二次の ab があり、 a と b と c なら、一次の $a + b + c$ 、二次の $ab + bc + ca$ 、三次の abc があります。

[例題] 次の各対称式を基本対称式で表しなさい。

1) $a^2 + b^2$ 2) $a^3 + b^3$ 3) $a^2b + ab^2$ 4) $a^2 + b^2 + c^2$ 5) $a^3 + b^3 + c^3$

[解答]

1) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

2) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

3) $a^2b + ab^2 = ab(a + b)$

4) $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

5) $a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3abc$
 $= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$
 $= (a + b + c)\{(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)\} + 3abc$

[注意] $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ の公式は、因数分解のところでも出て来るとても重要な公式です。絶対に身に付けて下さいね。

[問題] 次の各対称式を基本対称式で表しなさい。 1) $x^4 + y^4$ 2) $x^5 + y^5$

[解答] 1) $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = \{(x + y)^2 - 2xy\}^2 - 2(xy)^2$

2) $x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^3y^2 - x^2y^3 = \{(x + y)^2 - 2xy\}\{(x + y)^3 - 3xy(x + y)\} - (xy)^2(x + y)$

[問題] 対称式の応用問題として、 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ や $x^3 + \frac{1}{x^3}$ があります。それぞれ $x + \frac{1}{x}$ で表しなさい。

[解答] $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$ $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

[問題] $x + \frac{1}{x} = 2$ の時、 $x^5 + \frac{1}{x^5}$ の値を求めなさい。

[解答] $x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - x - \frac{1}{x} = \left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right\}\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)\right\} - \left(x + \frac{1}{x}\right)$
 $= (2^2 - 2)(2^3 - 3 \times 2) - 2 = 2 \times 2 - 2 = 2$