２直線の交点を通る直線

by Aokijuku

数Ⅱの「図形と方程式」の単元に「２直線の交点を通る直線」というテーマがありますが、今回はこれについて学びます。

例題　２直線 $2x-y+3=0$ と $x+3y-16=0$ の交点を通り、直線 $x-y+1=0$ に垂直な直線の方程式を求めなさい。

[考え方]　この問題の解く際、まず２直線の交点を通る直線の方程式を $2x-y+3+k(x+3y-16)=0 \cdots$ ①（k は定数）とおくところから始まりますが、問題はどうしてそんなふうにおくことが出来るかということです。多くの高校生の皆さんが、そこでつまずいているように思われます。このことを理解するポイントは２つあります。まず、k に色んな実数を代入しても、x と y の少なくとも一方は必ず残り、同時に２つの文字を消去できる k の値は存在しません。つまり、①式は x または y についての一次式であるということです。x または y についての一次式が何を表すかというと、それは直線ですね。まず、そこをしっかり押さえて下さい。次に①式が２直線 $2x-y+3=0$ と $x+3y-16=0$ の交点を通るのはどうしてかということですが、それは実際に交点の座標を求めなくても次のように考えれば分かります。つまり、こういうことです。２直線の交点の座標を (p, q) とすると、点 (p, q) は２直線 $2x-y+3=0$, $x+3y-16=0$ 上にあるから、$2p-q+3=0$ かつ $p+3q-16=0$ が成り立ちます。このとき、①式の左辺に $(x,y)=(p, q)$ を代入してみると、(①式の左辺)$=2p-q+3+k(p+3q-16)$ となりますが、$2p-q+3=0$ かつ $p+3q-16=0$ ですから、(①式の左辺)$=0+k\times 0=0$ となり、点 (p, q) は①式を満たすと言えます。①式を満たす点は、当然①式で表された直線上にあります。以上より、①式は直線の式であり、かつ与えられた２直線の交点を通ると言えたことになります。どうですか。この説明、理解出来ましたか。

解答　２直線の交点を通る直線の方程式を $2x-y+3+k(x+3y-16)=0 \cdots$ ①　つまり
$(k+2)x+(3k-1)y-16k+3=0$ とおくと、これは直線 $x-y+1=0$ に垂直だから、直線の垂直条件より

$1\times(k+2)+(-1)\times(3k-1)=0$ より　$k+2-3k+1=0$　$\therefore k=\dfrac{3}{2}$　これを①式に代入し

$2x-y+3+\dfrac{3}{2}(x+3y-16)=0$　両辺に２をかけて　$4x-2y+6+3x+9y-48=0$

よって、求める直線の方程式は　$7x+7y-42=0$　つまり　$x+y-6=0$　となる。