三角関数と極限（基礎編）

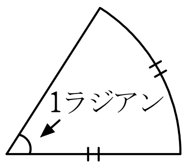
by Aokijuku

[まずは弧度法の理解から]

数Ⅲで学ぶ三角関数の極限を理解する上で、弧度法の理解が欠かせません。まず、その基礎を再確認してみよう。

「１ラジアンとは、どんな角度か」

皆さんは、１ラジアンの定義を言えますか。１ラジアンとは、半径と弧の長さが等しいときの角度のことを言います。



（図１）

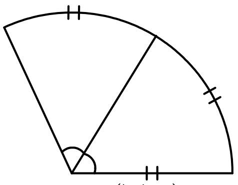
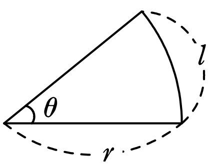

（図２）

図１の中心角が、ちょうど１ラジアンを表しています。では、図２の中心角は何ラジアンでしょうか。そうですね。２ラジアンになります。ところで、あなたはそれが１ラジアンの２倍であると、どうやって知りましたか。弧の長さが半径の２倍だからと考えたのではないですか。「１ラジアンの角の大きさが、半径と弧の長さが等しいときだから、弧の長さが半径の２倍ならば、角度は２ラジアンだ」　きっと、そう考えたのだと思います。

実は、その考え方そのものがラジアンによる角度の定義なのです。「弧の長さを半径で割ると１ラジアンの何倍か分かる」　つまり、図３において θ の定義は、

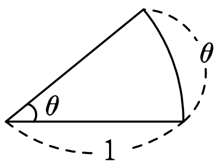
$$\theta=\frac{l}{r}$$ …① となり、これで何ラジアンかが分かることになります。



（図３）

この定義を利用すると、もし、中心角がラジアンで表されている扇形の半径が分かったら、<u>$l=r\theta$ より、中心角と半径をかけたら弧の長さが求まる</u>ことになります。

更に、図４を見て下さい。もし、中心角がθ（ラジアン）で半径が１なら、その弧の長さがどれだけになるか分かりますか。①式に $r=1$ を代入すれば良いだけですから、弧の長さは中心角と同じθとなることが分かりますね。

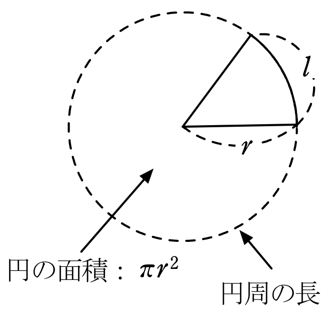


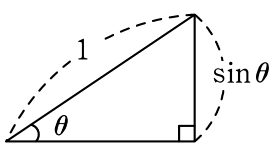
（図４）

ところで、中学で習った扇形の面積の出し方を覚えていますか。念のために、ここでそれも復習してみましょう。図３の扇形の面積をSとすると、$S=\dfrac{1}{2}rl$ となります。つまり扇形をまるで三角形のように考えて、弧を底辺、半径を高さとして三角形の面積の出し方で求めれば良いのです。なぜだか分かりますか。

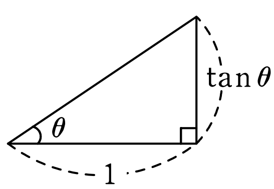
半径が r の円の面積は πr^2 で、扇形の面積は弧の長さに比例するから、

$$S=\pi r^2\times\frac{l}{2\pi r}=\frac{1}{2}rl$$ となります。しっかり覚えておいて下さいね。





（図５）

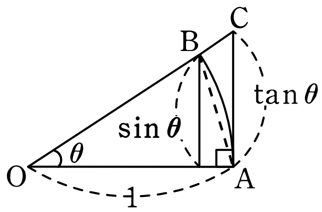


（図６）

ついでに三角比についての復習も少しやっておきたいと思います。図５は斜辺が１の直角三角形ですが、左端の鋭角をθとしたとき、三角比の定義から高さは $\sin\theta$ となります。また、図６は底辺が１の直角三角形ですが、同じく左端の鋭角をθとしたとき、三角比の定義から高さは $\tan\theta$ となります。これでいよいよ準備完了です

三角関数と極限（基礎編）

$\left[\lim_{\theta\to0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right.$の値の求め方$\left.\right]$



左の図で、３つの面積を比較すると、次のようになります。

（△OABの面積）＜（扇形OABの面積）＜（△OACの面積）

これを式で表すと、

$$\frac{1}{2}\times1\times\sin\theta<\frac{1}{2}\times1\times\theta<\frac{1}{2}\times1\times\tan\theta$$

これを整理すると、$\sin\theta<\theta<\tan\theta$　　つまり、$\sin\theta<\theta<\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ となります。

θは鋭角だから $\sin\theta>0$　　　各辺を $\sin\theta$ で割ると、$1<\dfrac{\theta}{\sin\theta}<\dfrac{1}{\cos\theta}$

各辺の逆数をとると、$\cos\theta<\dfrac{\sin\theta}{\theta}<1$　　　両端の極限を取ると、$\lim\limits_{\theta\to+0}\cos\theta=1$ 、$\lim\limits_{\theta\to+0}1=1$

よって、挟み打ちの定理より、$\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$　となる。

また、$\theta\to-0$ のときは、$\theta=-t$ とおくと、$t\to+0$ となり、$\lim\limits_{\theta\to-0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\sin(-t)}{-t}=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

よって、　$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$　となる。

練習　次の極限を求めなさい。

(1) $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin3\theta}{\sin2\theta}$　　(2) $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$　　(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^\circ}{x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin2x}{\cos x}$

解答

(1) $$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin3\theta}{\sin2\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\dfrac{\sin3\theta}{3\theta}\times3\theta}{\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}\times2\theta}=\frac{3}{2}$$

(2) $$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}=\lim_{\theta\to0}(1+\cos\theta)=2$$

(3) $180^\circ=\pi$ より、$1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$　　よって、$x^\circ=\dfrac{\pi x}{180}$　となる。

このとき　$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x^\circ}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\dfrac{\pi x}{180}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\dfrac{\pi x}{180}\times\dfrac{\pi}{180}}{\dfrac{\pi x}{180}}=\frac{\pi}{180}$$

(4) $x-\dfrac{\pi}{2}=\theta$ とおくと、$x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき、$\theta\to0$

よって　$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2x}{\cos x}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin(2\theta+\pi)}{\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)}=\lim_{\theta\to0}\frac{-\sin2\theta}{-\sin\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}\times2\theta}{\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\theta}=2$$