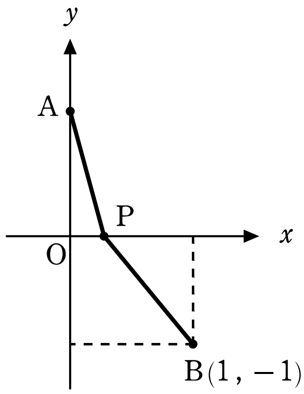
動点Pの運動、時間の最小値、三角比（応用問題 ①）

速度や加速度の絡む問題で２つの角度の正弦の値の比の値を求める興味深い問題があります。今日はそれをテーマに勉強しましょう。



問題　xy 平面上の動点が点A$(0\,,\,1)$ から x 軸上の点Pまで速さ a で直線運動し、さらに点Pから点B$(1\,,\,-1)$ まで速さ b で直線運動をする。ここで、$a\,,b$ は正の定数とする。次の問いに答えよ。

(1)　Pの x 座標を p とするとき、Aを出発してBに到達するまでの所要時間 $f(p)$ を求めよ。

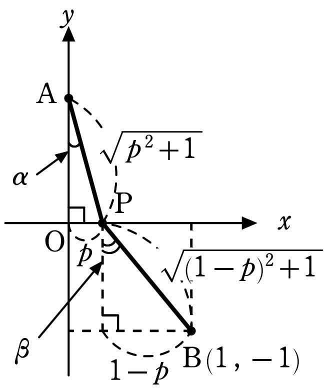
(2)　$f'(p)$ が単調増加であることを示せ。

(3)　$f(p)$ を最小にするような p が0と1に間にただ1つあることを示せ。

(4)　(3)で定まる点 P$(p, 0)$ に対し、直線AP，直線BPと y 軸のなす角をそれぞれ α, β （$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ ）とするとき、$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ の値を求めよ。　（信州大）

解答

(1)



左図より　$f(p)=\dfrac{\sqrt{p^2+1}}{a}+\dfrac{\sqrt{(1-p)^2+1}}{b}$

(2)　$f(p)=\dfrac{\sqrt{p^2+1}}{a}+\dfrac{\sqrt{(1-p)^2+1}}{b}$ の両辺を p で微分し、$f'(p)=\dfrac{p}{a\sqrt{p^2+1}}-\dfrac{1-p}{b\sqrt{(1-p)^2+1}}$

$$f''(p)=\frac{\sqrt{p^2+1}-p\times\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}}}{a(p^2+1)}-\frac{-\sqrt{(1-p)^2+1}-(1-p)\times\dfrac{-(1-p)}{\sqrt{(1-p)^2+1}}}{b\{(1-p)^2+1\}}$$

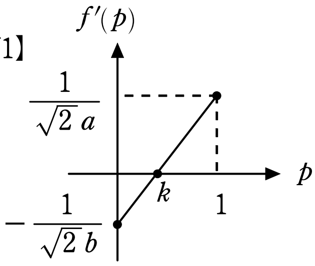
$$=\frac{p^2+1-p^2}{a(p^2+1)\sqrt{p^2+1}}-\frac{-\{(1-p)^2+1\}+(1-p)^2}{b\{(1-p)^2+1\}\sqrt{(1-p)^2+1}}$$

$$=\frac{1}{a(p^2+1)\sqrt{p^2+1}}+\frac{1}{b\{(1-p)^2+1\}\sqrt{(1-p)^2+1}}>0$$

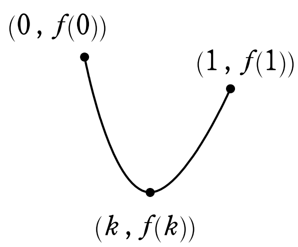
よって、$f'(p)$ は単調増加である。

(3)　$f'(p)$ は単調増加であり、$f'(0)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}\,b}<0$ 、また、$f'(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}\,a}>0$

【図1】



【図2】



動点Pの運動、時間の最小値、三角比（応用問題①）

したがって、 $f'(p)$ のグラフは【図1】のように p 軸と1点で交わる。その時の p 座標を k とすると、 $f'(p)$ の符号より、 $f(p)$ のグラフは【図2】のようになり、 $x=k$ のときに最小値 $f(k)$ を取ると言える。つまり、 $f(p)$ を最小にするような p が 0 と 1 に間にただ 1 つあることになる。

(4)　(1)から(3)より　$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{\dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}}{\dfrac{1-k}{\sqrt{(1-k)^2+1}}}$　ところで、 k は $f'(p)=0$ の解だから

$f'(k)=\dfrac{k}{a\sqrt{k^2+1}}-\dfrac{1-k}{b\sqrt{(1-k)^2+1}}=0$　つまり　$\dfrac{k}{a\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{1-k}{b\sqrt{(1-k)^2+1}}$ より

$\dfrac{\dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}}{\dfrac{1-k}{\sqrt{(1-k)^2+1}}}=\dfrac{a}{b}$　すなわち、 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{a}{b}$　となる。