変数分離形の不等式と微分（応用編 ①）

不等式の証明において、元の式を変数分離型の形式に変え、微分を利用して証明する問題があります。今回やるのはそんな問題です。見た目は簡単ですが、実際に解いて見ると意外と骨があります。じゃあ、やってみましょう。

問題 不等式 $\cos 2x + cx^2 \geqq 1$ が全ての実数 x について成り立つような定数 c の値の範囲を求めよ。（北海道大）

指針 冒頭でも述べたように、この問題では与式を変形し、 $c \geqq \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ として、 c を分離することが答案のキモとなります。但し、 $\cos 2x$ を移項し x^2 で割る際に x が 0 であるかどうかが問題になることは言うまでもありません。

まず、 $x=0$ のときを考えましょう。このとき、明らかに与式は任意の c の値について成り立ちます。従って、全ての実数 x について成り立つ c の条件を求めるのは、 $x \fallingdotseq 0$ のときとなります。なお、与式は偶関数の式ですから、$x>0$ のときだけ考えれば良いですね。

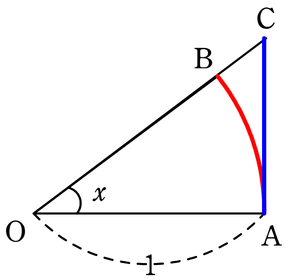
解答 $x=0$ のとき、明らかに与式は任意の c の値について成り立ちます。また、 $f(x)$ は偶関数ですから、 $x \geqq 0$ で考えれば良いと分かります。 $x \fallingdotseq 0$ のとき、 $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ とおきましょう。$1-\cos 2x$ を見ると、2倍角の公式 $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ が思い浮かびますね。ですから、 $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=\dfrac{1-(1-2\sin^2 x)}{x^2}=2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ と変形しましょう。

問題の中心は、 $x>0$ における $f(x)$ の最大値がどうなるかです。 c の取るべき値は、その最大値以上であれば良いことになります。さて、$|\sin x| \leqq 1$ や $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ であること、また $1<x$ で $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|<1$ となることを考えると、$f(x)$ の最大値は $0<x\leqq 1$ の範囲に存在することになります。

$f(x)=2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ を $0<x\leqq 1$ の範囲で微分してみましょう。

$$f'(x)=4\times\frac{\sin x}{x}\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=4\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{4\sin x\cos x(x-\tan x)}{x^3}<1 \quad (\because 0<x\leqq 1)$$

ここで少し補足しておきましょう。$0<x\leqq 1$ つまり x は鋭角ですから、 $\sin x$ や $\cos x$ は当然、正の値を取ります。また、下図より　$x-\tan x>0$ となります。



（左図の説明）

弧度法の定義より $\overset{\frown}{AB}=x$、また三角比の定義より $AC=\tan x$ となります。このとき、扇形の面積と△OACの面積を比べると、 $\dfrac{1}{2}\times x\times 1<\dfrac{1}{2}\times 1\times\tan x$ となりますね。ですから、 x が鋭角のとき $x<\tan x$ が成り立ちます。

$0<x\leqq 1$ において、 $f'(x)<0$ ですから、 $f(x)$ は単調減少になります。このとき、 $\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0} 2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2=2$ となり、 $x=0$ のとき、与式 $\cos 2x+cx^2\geqq 1$ は任意の x について成り立ちますから、与式が全ての実数 x について成り立つような 定数 c の範囲は $c\geqq 2$ であると言えます。