グラフの対称性と定積分（応用編①）

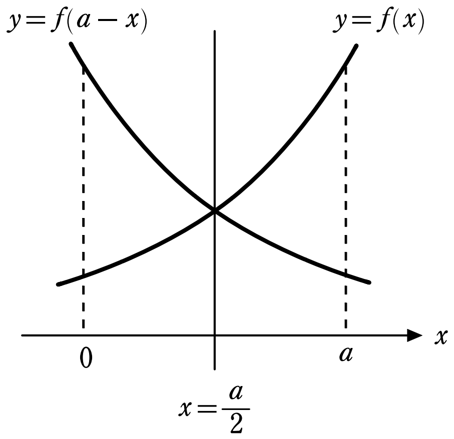
グラフの対称移動についての詳細については、数Ⅲの Open 教材「様々な対象移動」を参照して欲しいですが、それを利用した定積分の問題は入試における頻出問題の１つです。今回は、それについて学びます。

$\boxed{\text{問題}}$

(1) 連続関数 $f(x)$ および定数 a について $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^{\frac{a}{2}}\{f(x)+f(a-x)\}\,dx$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$ を求めよ。

$\boxed{\text{方針}}$ $y=f(x)$ と $y=f(a-x)$ の２つのグラフは $x=\dfrac{a}{2}$ について対称であるという性質を持っています。（※上記、「様々な対称移動」を参照。）



このとき、$\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ で表される面積は、$\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx$ と $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)\,dx$ の和、すなわち $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}}\{f(x)+f(a-x)\}\,dx$ に等しいことが分かります。そのためには、$\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)\,dx$ が $\displaystyle\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\,dx$ と等しいことを示せば良いですね。

$\boxed{\text{解答}}$ (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)\,dx$ について、$a-x=t$ とおいて、両辺を t で微分すると、$-\dfrac{dx}{dt}=-1$ $\therefore\ \dfrac{dx}{dt}=-1$

また、

x	$0\to\dfrac{a}{2}$
t	$a\to\dfrac{a}{2}$

このとき、$\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)\,dx=\int_a^{\frac{a}{2}} f(t)(-1)\,dt=\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\,dx$ （※定積分では変数 t を x に変えても値は同じですね。）

よって、$\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}}\{f(x)+f(a-x)\}\,dx=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx+\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx$ となり、与式は成立すると言える。

(2) (1)の式において、$a=\dfrac{\pi}{2}$，$f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}$ とおくと、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos\left(\frac{\pi-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\right\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

どうですか。分かりましたか。最後は随分あっけなかったですね。