# 分数関数のグラフと数列（ 応用編 ①）

$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフと数列を関連させた面白い入試問題があります。以下の問題は、かつて防衛大学の入試に出た問題ですが、是非、楽しんで下さい。

$\boxed{\text{問題}}$

(1)　$k>0$ に対し　$\dfrac{1}{k+1}<\displaystyle\int_k^{k+1}\dfrac{1}{x}dx<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}\right)$　が成り立つことを示せ。

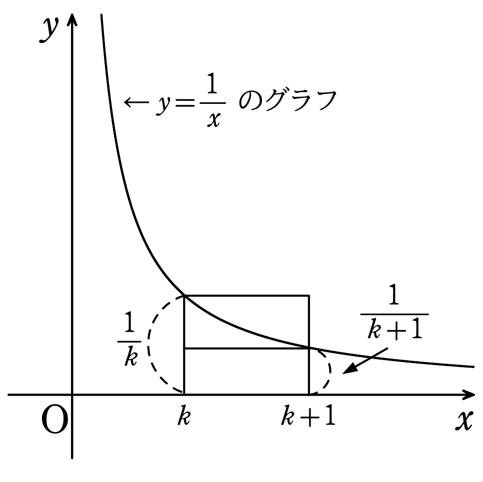
(2)　$a_n=\log n-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$　（$n=2,\ 3,\cdots$ ）　に対して次の不等式が成り立つことを示せ。但し、$\log$　は自然対数（底が $e$ の対数のこと）である。

$0<a_n<a_{n+1}<\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(n+1)}$　（$n=2,3,\cdots$ ）　　（防衛大学）

$\boxed{\text{解答}}$

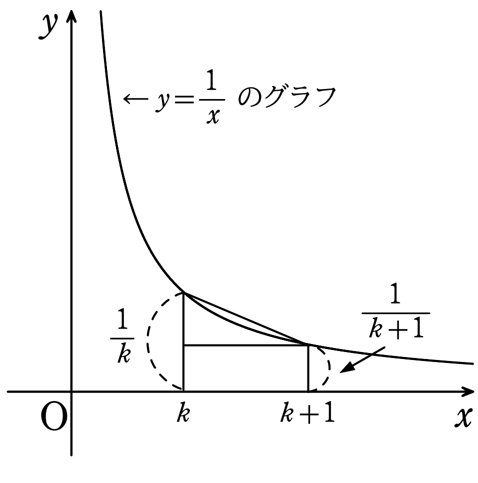
(1)　この手の問題では、その話の中心にある関数（この場合は $y=\dfrac{1}{x}$ ）のグラフを、その積分の範囲である $k\leqq x\leqq k+1$ における $x$ 軸とグラフ自身によって囲まれた図形の面積と、その内と外にある２つの長方形の面積を比較するというのが一般的です。但し、この問題では一方は長方形だけど、もう一方は台形というのが少し変わったところかな。

【一般的な問題】




$\dfrac{1}{k+1}<\displaystyle\int_k^{k+1}\dfrac{1}{x}dx<\dfrac{1}{k}$

【この問題】




$\dfrac{1}{k+1}<\displaystyle\int_k^{k+1}\dfrac{1}{x}dx<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k}\right)$

右側の図より　$\dfrac{1}{k+1}<\displaystyle\int_k^{k+1}\dfrac{1}{x}dx<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k}\right)$　がなりたつ。

(2)　$\dfrac{1}{k+1}<\displaystyle\int_k^{k+1}\dfrac{1}{x}dx$　に $k=1,\ 2,3,\cdots,n-1$　を順次代入し辺々たすと

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\displaystyle\int_1^n\dfrac{1}{x}dx$　→　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\Big[\log x\Big]_1^n$　→　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\log n$

つまり　$0<\log n-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$　となり、$0<a_n$　…①　が成り立つ。

また　$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\right)$　に $k=1,\ 2,3,\cdots,n$　を順次代入し辺々たすと

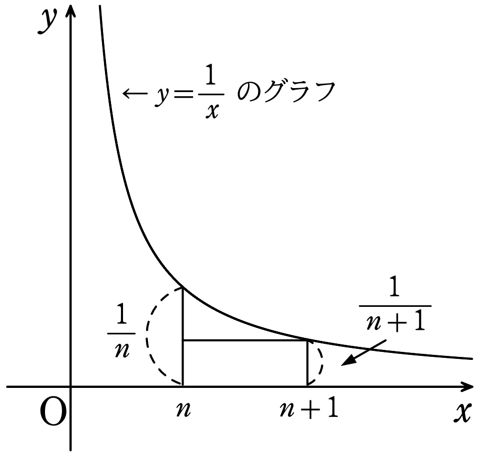
$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$\log(n+1)<\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n+1)}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\log(n+1)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n+1)}$$

つまり　$a_{n+1}<\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(n+1)}$　…②　が成り立つ。

更に　$a_{n+1}-a_n=\log(n+1)-\log n-\dfrac{1}{n+1}=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx-\frac{1}{n+1}$　について




$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$ は、４つの曲線と直線 $y=\dfrac{1}{x}$ , $x$軸 , $x=n$ , $x=n+1$ で囲まれた部分の面積であり、$\dfrac{1}{n+1}$ は、底辺が１、高さが $\dfrac{1}{n+1}$ の長方形の面積だから、左図より　$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx>\frac{1}{n+1}$

つまり　$a_{n+1}-a_n>0$　　すなわち　$a_n<a_{n+1}$　…③　が成り立つ。

①,②,③より　$0<a_n<a_{n+1}<\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(n+1)}$　（$n=2,3,\cdots$）が成り立つと言える。