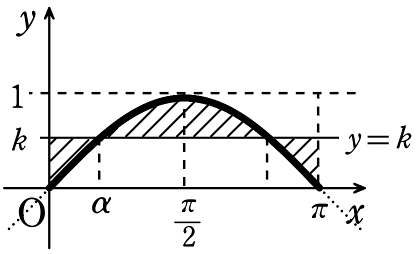
領域を x 軸の周りに回転させる回転体の体積の最小値　by Aokijuku

問題 xy 平面上で不等式 $(y-k)(y-\sin x)\leqq 0$, $0\leqq x\leqq \pi$ の表す領域を x 軸の周りに1回転させて出来る体積は、どのような k の値に対して最小になるか。但し、$0\leqq k\leqq 1$ とする。　　(徳島大学)

指針 $(y-1)(y-2)\leqq 0$ ならば、即座に $1\leqq y\leqq 2$ と出来ますね。それは1と2の大小が分かっているからです。つまり、
$(y-k)(y-\sin x)\leqq 0$
を解くには、kと$\sin x$ の大小を場合分けする必要があるということです。

解答 $k\leqq \sin x$ のとき、$(y-k)(y-\sin x)\leqq 0$ より $k\leqq y\leqq \sin x$
また、$\sin x\leqq k$ のとき、同じく $(y-k)(y-\sin x)\leqq 0$ より$\sin x\leqq y\leqq k$　これと $0\leqq x\leqq \pi$より、これらの不等式が表す領域は以下の通り。（但し、$0\leqq k\leqq 1$ ）



題意より $0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲における回転体の体積が最小になるような k の値を求めれば良い。

$\sin\alpha=k\ \left(0\leqq \alpha\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると、　$0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}$ における回転体の体積は

$\pi k^2\alpha-\pi\displaystyle\int_0^{\alpha}\sin^2 x\,dx+\pi\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx-\pi k^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ と表せる。これを計算すると

$$\pi k^2\alpha-\pi\int_0^{\alpha}\sin^2 x\,dx+\pi\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx-\pi k^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$=\pi k^2\alpha-\pi\int_0^{\alpha}\frac{1-\cos 2x}{2}dx+\pi\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx-\frac{\pi^2k^2}{2}+\pi k^2\alpha$$

$$=2\pi k^2\alpha-\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\alpha}+\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi^2k^2}{2}$$

$$=2\pi k^2\alpha-\pi\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)+\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)-\frac{\pi^2k^2}{2}$$

$$=2\pi k^2\alpha-\pi\alpha+\frac{\pi}{2}\sin 2\alpha+\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2k^2}{2}$$

$$=2\pi\alpha\sin^2\alpha-\pi\alpha+\frac{\pi}{2}\sin 2\alpha+\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{2}\sin^2\alpha\quad(\because \sin\alpha=k)$$

この式はαの関数だから、$f(\alpha)$ とおくと

$f(\alpha)=2\pi\alpha\sin^2\alpha-\pi\alpha+\dfrac{\pi}{2}\sin 2\alpha+\dfrac{\pi^2}{4}-\dfrac{\pi^2}{2}\sin^2\alpha$ となる。$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ において、この式をαで微分すると

$$f'(\alpha)=2\pi\sin^2\alpha+4\pi\alpha\sin\alpha\cos\alpha-\pi+\pi\cos 2\alpha-\pi^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=\pi(1-\cos 2\alpha)+2\pi\alpha\sin 2\alpha-\pi+\pi\cos 2\alpha-\frac{\pi^2}{2}\sin 2\alpha=2\pi\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin 2\alpha$$

$f'(\alpha)=0$ とおいて $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ で解くと、 $\sin 2\alpha>0$ だから

$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ となる。このとき、増減表は以下の通り

α	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$	/	$-$	0	$+$	/
$f(\alpha)$	/	$\searrow$	最小	$\nearrow$	/

よって、 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき体積は最小になり、 $k=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となる。