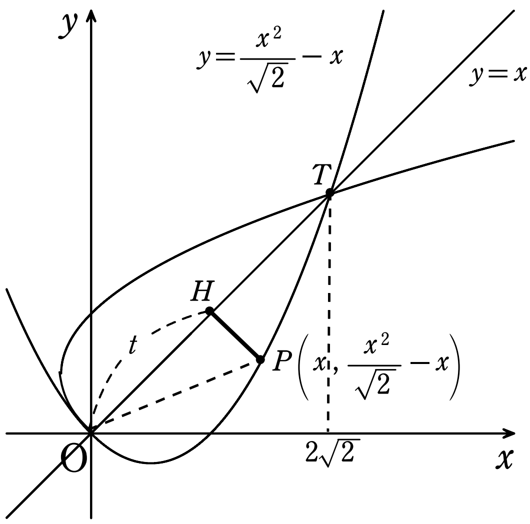
# $y=x$の周りについての回転体の体積　by Aokijuku

$x$軸や$y$軸の周りについての回転体の体積については学びましたが、$y=x$の周りについての回転体の体積を求めるには、どうすれば良いのでしょうか。ここで、$x$軸の周りについての回転体の体積の求め方を復習してみましょう。

$x$軸に沿って原点から$x$だけ離れたところにおける$x$軸に垂直な平面で切断したときの立体の断面積が$S(x)$で表されたとき、$a \leqq x \leqq b$における立体の体積をVとすると　$V=\int_a^b S(x)dx$　で求めることができました。この原則は、どんな直線に沿った立体の場合も同じです。そのことを踏まえて、次の問題を解いて見ましょう。

問題　放物線$y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x$と直線$y=x$で囲まれた図形と$y=x$の周りに一回転して出来る立体の体積を$V$求めよ。

解答




左図において、$OH=t$とし、$HP$を半径とする円の面積$\pi HP^2$を$t$の関数と見なすと、$OT=4$だから$V=\pi\int_0^4 HP^2 dt \cdots ①$で求めることが出来る。

ところで、点$P$と直線$x-y=0$との距離は

$$HP=\frac{\left|x-\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}+x\right|}{\sqrt{2}}=\frac{|-x^2+2\sqrt{2}x|}{2}$$ となり

$HP^2=OP^2-t^2$ より

$$\frac{(-x^2+2\sqrt{2}x)^2}{4}=x^2+\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}}-x\right)^2-t^2$$

$$(-x^2+2\sqrt{2}x)^2=4x^2+4\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}}-x\right)^2-4t^2$$

$$x^4-4\sqrt{2}x^3+8x^2=4x^2+2x^4-4\sqrt{2}x^3+4x^2-4t^2 \qquad 4t^2=x^4 \qquad t^2=\frac{x^4}{4}$$

$x \geqq 0$, $t \geqq 0$ より $t=\dfrac{x^2}{2}$　よって　$\dfrac{dt}{dx}=x$　また

| $t$ | $0 \to 4$ |
|---|---|
| $x$ | $0 \to 2\sqrt{2}$ |

よって①より $V=\pi\displaystyle\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{(-x^2+2\sqrt{2}x)^2}{4}\cdot\frac{dt}{dx}dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{2\sqrt{2}}x(x^4-4\sqrt{2}x^3+8x^2)dx$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{x^6}{6}-\frac{4\sqrt{2}}{5}x^5+2x^4\right]_0^{2\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}\cdot(2\sqrt{2})^4\cdot\left\{\frac{(2\sqrt{2})^2}{6}-\frac{4\sqrt{2}}{5}\cdot2\sqrt{2}+2\right\}$$

$$=16\pi\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{16}{5}+2\right)=16\pi\cdot\frac{20-48+30}{15}=\frac{32}{15}\pi$$